Geometria I

20 settembre 2011

Esercizio 1. Si considerino i sottoinsiemi di $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$

- $U = \left\{ \begin{pmatrix} 2b+4c & a+3b+5c \\ 0 & a-c \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) | a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$
- $W = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) | x+y-t=0, y-z-t=0, \text{con } x,y,z,t \in \mathbb{R} \right\}$

(a) Verificare che U e W sono sottospazi di$M_2(\mathbb{R})$ e determinarne la dimensione e una base;

(b) determinare la dimensione e una base per $U+W$ e $U \cap W$ e stabilire se la somma $U+W$ è diretta.

Esercizio 2. Si considerino, al variare del parametro reale k, le matrici

$$A_k = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ k^2-1 & 0 & -k \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_k = \begin{bmatrix} -2k^2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

(a) Discutere, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la risolubilità del sistema lineare $A_k X = B_k$, specificando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile.

Posto ora $k=-1$:

(b) si risolva il sistema;

(c) si stabilisca se A_{-1} è diagonalizzabile e in caso affermativo, si determinino una matrice diagonale simile ad A_{-1} e la relativa matrice diagonalizzante.

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ sia $f_{h,k} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione tale che

$$f_{h,k}((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)) = x_1y_1 + kx_1y_2 - kx_2y_1 + x_2y_2 + hx_1x_3^2 - x_3y_3,$$

con h e k parametri reali. Determinare:

(a) i valori dei parametri per i quali $f_{h,k}$ risulta essere una forma bilineare; [$\forall\ k \in \mathbb{R}, h=0$]

(b) i valori dei parametri per i quali $f_{h,k}$ risulta essere un prodotto scalare. [$k=h=0$]

Per i valori che rendono $f_{h,k}$ un prodotto scalare, stabilire, giustificandolo:

(c) se esso ‘e degenere e scriverne la matrice rispetto alla base

$$\mathscr{B} = ((1, 1, 1), (1, 0, 1), (0, 1, 1));$$

$$\left[\text{Non è degenere; } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}\right]$$

(d) se $\mathscr{B}$ ‘e una base ortogonale rispetto a tale prodotto scalare e, in caso di risposta negativa, determinarne una ortogonale.
[$\mathscr{B}$ non è ortogonale, lo è ad esempio ((1,1,1),(0,1,1),(1,0,1))]

Esercizio 4. Nel piano proiettivo $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, determinare un'equazione della conica di centro $C = (-1; -1)$, avente un asintoto parallelo alla retta $a : x - y + 4 = 0$, passante per il punto P di coordinate $P = (-2; 1)$ e tale che la direzione dell'altro asintoto sia data dal vettore $\vec{v} = (1; -1)$.
Determinarne il tipo affine e le equazioni degli assi.
[$x^2 - y^2 + 2x - 2y + 3 = 0$, iperbole (equilatera), assi: $x = -1$ e $y = -1$]